对马赫原理与压强如何影响时空弯曲的探讨

杨学军 *
绍兴文理学院　物理系　中国绍兴 312000

摘要

提出马赫思想的一种表述，并讨论了压强对时空弯曲的影响，由此得到如下一些结果。第一，有一部分类星体由于其非宇宙学红移而成为伪类星体；第二，对暗物质存在的部分依据如旋涡星系转动曲线、宇宙结构形成等给出非暗物质的理解；第三，预期沿银河系径向高速运动粒子静惯性质量会发生改变、地球绕日轨道和月球绕地轨道会出现微小畸变；第四，计算表明孤立恒星、星系和星系团可能具有广义相对论二十余倍的引力透镜效应；第五，黑洞奇点有可能避免；第六，给出宇宙一种周期性演化模型。在这种模型中虽然宇宙演化的发散奇点不可能避免，但测地线完备可能保持，并且不需要暗能量当今宇宙仍可能处于加速膨胀阶段。该模型不存在视界疑难和平直性疑难。最后，探讨了引力波源是否可多信道探测的问题。

关键词：类星体红移，旋涡星系转动曲线，暗物质，引力透镜，黑洞奇点，宇宙加速膨胀，暗能量，宇宙结构形成，引力波

PACC：　04.20.-q; 04.50.Kd

Discussion on Mach's Principle and How Pressure Affects Curvature of Spacetime

Xuejun Yang

Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, P. R. China

*本文系国家自然科学基金项目（项目批准号：　11273009）的研究成果之一； E-mail: yangxuejun@usx.edu.cn

Abstract: In this paper, a expression of Mach's thought about inertial force is proposed, and how pressure affects curvature of spacetime is discussed, thus following results are obtained. First, some quasars become false-quasars due to their non-cosmological redshift; Second, for the evidences of dark matter, such as the rotation curve of spiral galaxies and the formation of the universe'structure, an understanding without dark matter is proposed; Third, the change in the rest inertial mass of particles moving at high speed along to the radial direction of the Milky Way, the malformations of Earth's orbit around the Sun and Moon's orbit around the Earth are expected; Fourth, by calculations it is showed that the gravitational lens effects of isolated stars, galaxies and galaxy clusters have more than twenty times the effects of General relativity; Fifth, it is possible to avoid singularities of black hole; Sixth, a cyclical evolution model of the universe is obtained. In this model, although the divergent singularities of the universe cannot be avoided, the completeness of the geodesic can be maintained. In this model, today there still is an accelerated expansion of the universe without dark energy. In this model, there are no horizon problem and flatness problem. Finally, it is discussed whether the gravitational wave source can be detected by multiple channels.
Keywords: redshift of quasar, rotation curve of spiral galaxy, dark matter, gravitational lens, black hole singularity, accelerated expansion of the universe, dark energy, formation of universe's structure, gravitational wave

§1 引言

本文的讨论涉及如何定量表述马赫关于惯性效应的思想以及压强如何弯曲时空是否被恰当描写这两个方面，分述如下。

众所周知，马赫认为一个物体受到的惯性力来自该物体相对于宇宙物质而不是相对于牛顿绝对空间的加速运动。马赫此想法被爱因斯坦表述为马赫原理：物体的惯性效应来自物体相对于宇宙物质加速运动时所受到的引力。爱因斯坦认为广义相对论蕴含了马赫原理。Thirring 用广义相对论研究了转动的中空球壳内引力场 [1]，得到一个数量级与径向离心力相同的轴向力，但这不符合观测事实。为进一步看清马赫原理存在的问题，考察一个玩具

宇宙模型，设想整个宇宙物质分布成球对称壳，壳的空腔内部是真空，在空腔内引入一个物体，若该物体还有惯性，则按马赫的想法该物体的惯性效应应该与球壳宇宙物质有关。由 Birkhoff 定理 [2] 可知，即便球壳宇宙的物质有径向加速运动，宇宙球壳对壳内物体也没有引力作用。这可能说明物体的惯性效应与引力无关，无论该物体相对于宇宙物质是否加速。 Brans 和 Dicke 建立了一种比广义相对论更符合马赫原理的标量 - 张量引力理论 [3] 。在该理论中，引力由描述时空几何的度规 g_{ab} 和标量场 ϕ 描写。引力常数 $G = \frac{1}{<\phi>}$ ，其中 ϕ 由周围的物质决定，这导致 G 也随物质分布的变化而变化。但是， Brans-Dicke 理论中还有一个参数 ω 。研究表明 ω 越大，理论与观测结果越一致 [4] ，但当 $\omega \to \infty$ 时， Brans-Dicke 理论又回到广义相对论，从而似乎成为一种多余的理论。其实马赫原理并没有得到实验和观测的支持。按照马赫原理，银河系对惯性质量的影响是各向异性的，当物体沿不同方向加速，其惯性质量是不同的。 Hughes 和 Drever 用核磁共振做了实验， Hughes 和 Drever 的结果分别是 $\frac{\Delta m}{m} < 10^{-22}$ 和 $\frac{\Delta m}{m} < 5 \times 10^{-23}$ ， m 和 Δm 分别是原子核惯性质量和各向异性导致的惯性质量的差异部分。 Ivash 通过水星轨道进动的测量所得结果为 $\frac{\Delta m}{m} < 1.57 \times 10^{-10}$ 。

如上所述，爱因斯坦总结的马赫原理并没有得到观测和实验的支持，但这并不意味着马赫关于惯性的思想不正确，而可能是马赫思想没有被正确地表述。本文试图给出能更接近于马赫思想的一种表述：物质的惯性来自于宇宙其余物质的作用，物质的惯性质量只与宇宙其余物质的时空分布有关而与相对运动的速度和加速度无关。

我们知道，爱因斯坦方程至少遇到如下几个主要问题。第一，黑洞奇点和宇宙大爆炸奇点的存在，对此人们寄希望于量子引力理论的成功能化解此问题；第二，宇宙演化存在视界疑难和平直性疑难，这可通过引入暴涨机制来克服；第三，大爆炸早期宇宙膨胀过快使得没有暗物质不可能形成今天的宇宙结构；第四，在广义相对论框架内解释宇宙加速膨胀会遇到宇宙学常数疑难 [5] 。为解决广义相对论遇到的各种问题，人们曾试图修改或推广爱因斯坦方程，虽然都不尽人意，但仍不失为有意义的工作。如 Kaluza-Klein 理论 [6] ， Brans-Dicke 理论 [3] ， f(R,T) 引力理论 [7] 等等。本文作者的论文 [8] 是将广义相对论推广到 5 维的一种尝试。

本文对压强如何影响时空弯曲进行了探讨，并在讨论中尽可能考虑马赫关于惯性的思

想，以期缓解或从另一个角度来理解爱因斯坦理论存在的上述问题。作者之所以对压强如何影响时空弯曲提出疑问是基于如下考虑，爱因斯坦方程中压强与实际应该起到的作用可能相反，这也许是黑洞出现奇点的原因。下面考查此问题。在介质中任取一截面，截面两侧的物质由于质量密度 ρ 而产生引力效应，同时由于压强 p 应该产生排斥效应，可在爱因斯坦引力场方程中 $p>0$ 的压强和质量密度 ρ 却同样产生引力效应。这可以从爱因斯坦宇宙演化方程之一的 $3\ddot{a}=-4\pi a(\rho+3p)$ [9] 看出 p 与 ρ 都使宇宙膨胀减速。我们还可以从另一个角度来看此问题。对理想流体介质及其 4 速为 Z^a 的随动观者，由爱因斯坦方程可得

$$R_{ab}Z^aZ^b=\frac{1}{2}\kappa\rho+\frac{3}{2}\kappa p-\Lambda. \tag{1}$$

我们知道奇点存在的条件之一是 $R_{ab}Z^aZ^b\geq 0$[2]，引力应该加强该条件，压强应该削弱该条件。但从式 (1) 我们看到 p 与 ρ 一样都在加强奇点存在的条件，而正宇宙学常数 Λ 倒正如我们预期的那样在削弱奇点存在的条件。

本文综合以上两个方面的问题给出作者自己的理解和解决方案，并只在经典引力理论的框架之下展开讨论，各部分内容安排如下。

在 §1 中，概述本文所讨论的问题。

在 §2 中，给出了描述惯性作用的标量场 $f(P)$ 的定义，分别计算了 $k=0$ 和 $k=1$ 的宇宙背景的 $f(P)$；讨论一部分类星体的红移、旋涡星系转动曲线；在牛顿力学中由惯性效应给出了质量成中心分布情况下物体沿径向运动时可能会受到附加的径向排斥作用的可能；预期沿银河系径向高速运动的粒子的静惯性质量可能会发生改变。

在 §3 中，讨论了压强对时空弯曲的影响，并给出理想流体和真空的引力场方程。

在 §4 中，给出相应的史瓦西解，该解能很好地解释引力红移、水星近日点进动和光线弯曲，其给出的星系和星系团的引力透镜效应比爱因斯坦理论的结果要强二十余倍，这支持没有暗物质的想法；给出了描写静态球对称恒星内部运动状态的方程，得到了星体表面度规不连续的结果。这样的解使得星体演化形成黑洞后不会塌缩形成奇点， Hawking 辐射最终可能使黑洞演化成中子星。

在 §5，讨论了宇宙的演化。详细计算了 $k=0$ 和 $\alpha=-\frac{1}{5}$ 的宇宙演化，近似得到宇宙周期性演化的图像。虽然奇点不可避免，但会是测地线完备的发散奇点。从本周期开始宇宙进

行了加速的缓慢膨胀过程直到今天经历了大约 412 亿年。这样的图像不存在平直性疑难和视界疑难，没有暗物质的宇宙结构的形成问题可能得到缓解；通过半定量的讨论，我们发现 $k=1$ 和 $\alpha=-\frac{1}{5}$ 的宇宙也可能得到周期性演化的图像，而且宇宙尺度因子 $a(t)$ 存在一个最小值而不会出现奇点。

在 §6 中，我们猜想引力场能量的不可定域性可能反映引力能量不具有传播性，引力波有沿类空方向传播的可能，这也许使得引力波源是否可多信道探测存在疑问。

在 §7，给出了简短的小结。

§2 可能的惯性效应

§2.1 描写惯性作用的 $f(P)$

设时空为 (M,g_{ab})， $L(\tau)$ 为一个质点的世界线， τ 是该质点的固有时， $U^a\equiv(\frac{\partial}{\partial\tau})^a$ 为质点的 4 速，点 $P\in L$。相对于任一瞬时观者 (P,Z^a)（ $Z^a\equiv(\frac{\partial}{\partial\tau_o})^a$ 是该观者 4 速， τ_o 是观者的固有时），质点的 3 速定义为

$$u^a:=h^a{}_bU^b/\gamma. \tag{2}$$

$h^a{}_b\equiv g^{ac}h_{cb}$， $h_{ab}\equiv g_{ab}+Z_aZ_b$， $\gamma\equiv-U^aZ_a$。质点的 3 速率定义为

$$u:=\sqrt{u^au_a}. \tag{3}$$

$u_a\equiv h_{ab}u^b$。可以证明 $\gamma=(1-\frac{u^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}=\frac{d\tau_o}{d\tau}$ 和 $U^a=\gamma(Z^a+u^a)$.

试探质点的静惯性质量和静引力质量分别记为 m_0 和 m_{G0}，假设惯性作用产生 m_0，其与 m_{G0} 有如下关系

$$m_0=f(P)m_{G0}. \tag{4}$$

其中 $P\in M$ 为试探质点所在的时空点， $f(P)$ 为 M 上的非负标量场，取决于 M 上物质的分布，其描写惯性相互作用 (不包括惯性自相互作用)，对基本粒子，静引力质量 m_{G0} 是粒子的内禀属性。对复合粒子 m_{G0} 除与其组分的引力质量有关外还与各组分间的相互作用及其运动有关，但只有在质量亏损以及天体的并合过程中 m_{G0} 从而 m_0 的变化才明显表现出

来。本文并不能一般地给出 $f(P)$ 满足的微分或积分方程，但在后面将尽可能给出 $f(P)$ 在一些特殊情况下的表达式。

我们知道，相对于任一瞬时观者 (P, Z^a) 质点的惯性质量 $m = \gamma m_0$ 。假定质点引力质量是观者依赖的，即质点的引力质量 $m_G = \gamma m_{G0}$ 。则

$$m = \gamma f(P) m_{G0} = f(P) m_G. \tag{5}$$

惯性质量与引力质量之比

$$\frac{m}{m_G} = f(P). \tag{6}$$

虽然惯性质量与引力质量之比时空点依赖但却是非物质依赖的，正是这一点保证了引力理论仍然是时空的几何理论。压强可表为

$$p = \xi f(P) \rho_G + \frac{1}{3} \rho_R = \xi \rho + \frac{1}{3} \rho_R, \tag{7}$$

其中 ρ_R 为辐射的能量密度， ρ_G 为非辐射物质的引力质量密度， $\rho = f(P) \rho_G$ 。温度越高，越有 $\xi \to \frac{1}{3}$ 。

这里需要说明 $m = f(P) m_G$ 与已有的检验等效原理的观测和实验不矛盾。"惯性质量 / 引力质量 = 常数" 是被牛顿理论和广义相对论等引力理论普遍接受并被实验反复检验的结论 [10] 。对 "弱等效原理"、 "爱因斯坦等效原理" 和 "强等效原理" 检验得最多的是 "弱等效原理"，但所有传统的检验实验大多在地球及其附近进行，其范围大到地月距离 [11] 。更大范围的检验是通过测量时间延迟效应来实现的。为了区分不同的引力理论，人们建立了参数化后牛顿形式 (PPN) 的理论 [12] 。任何符合弱等效原理的引力理论预言不同粒子的 10 个后牛顿参数之一的 γ 都有相同值。根据 Shapiro 时间延迟效应 [13] ，以光速运动的中性粒子在引力场中传播会产生时间延迟 $t_{gra} = -\frac{1}{c^3} \int (1+\gamma) U(r) dr$ ，其中 $U(r)$ 是引力势。如果 γ 相同则 t_{gra} 相同。人们利用来自银河系外暂现源的中微子、光子和引力波的时间延迟效应检验了弱等效原理，在不同精度内弱等效原理都成立 [14] 。广义弱等效原理保证所有粒子的 "惯性质量与引力质量之比" 在同一时空点是相同的，当只有引力作用时所有粒子的力学行为没有区别。广义弱等效原理容易推广成 "广义爱因斯坦等效原理"，广义爱因斯坦

等效原理保证以光速运动的不同中性粒子在引力场中有相同的运动行为，其 Shapiro 时间延迟效应没有区别。广义弱等效原理与包括时间延迟效应在内的所有检验弱等效原理的实验并不矛盾。

在牛顿时空的宇观范围，对稳定的物质分布，假设 $f(P)$ 满足

$$\nabla^2 f(P) - \delta^2 f(P) = -4\pi K \rho_G, \tag{8}$$

其中待定常数 δ 和 K 将在后面给出。对 M_G 的点源，

$$f(P) = K\frac{M_G}{r}exp(-\delta r). \tag{9}$$

满足式 (8)， r 为到点源的距离。在 §2.2 还将对具有 Robertson-Walker 度规的宇宙背景给出 $f(P)$ 。

在 $f(P)$ 非均匀的空间中以速度 $\mathbf{V}$ 运动的引力质量为 m_G 的质点将受到一种排斥效应，可由式 (29) 得到

$$\mathbf{F}_{repul} = -\mathbf{V}\frac{dm}{dt} = -\mathbf{V}\frac{d(m_G f(P))}{dt} = -m_{G0}\mathbf{V}\nabla(\gamma f(P))\cdot\mathbf{V}. \tag{10}$$

对 Higgs 粒子惯性质量的获得我们可以如下理解。通过 Higgs 机制，基本粒子获得引力质量 m_G ，再通过时空中其余物质的惯性作用而获得惯性质量 m 。即 Higgs 粒子的惯性质量取决于 Higgs 机制和时空中其余物质的分布。假定文献 [15] 式 (4) 中 $e\varphi_0 = m_G f(P)$ ，即规范粒子的真空解 $\varphi_0 = \frac{m_G}{e} f(P) \sim f(P)$ 与时空中全部物质的分布有关， m_G 为常数，是规范粒子的引力质量。假定文献 [15] 式 (2b) 中 $2\varphi_0\sqrt{V''(\varphi_0^2)} = m_G' f(P)$ ，则 Higgs 粒子的引力质量 $m_G' = \frac{2m_G}{e}\sqrt{V''(\varphi_0^2)}$ 。若忽略 V 关于 φ 的高阶项，则 $V''(\varphi_0^2)$ 近似与 φ_0 无关，即 m_G' 为常数。

§2.2 宇宙背景的 $f(P)$

如果宇宙学原理成立，则宇宙度规为 Robertson-Walker 度规 [9]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \tag{11}$$

质点 1 对质点 2 的惯性作用质量记为 M 。假设惯性作用沿类光测地线传播，质点 1 对质点 2 的惯性作用在 t_1 时刻出发沿类光测地线传播在 t_2 时刻到达质点 2 。这种作用可能并不简单，作为讨论我们不妨假设

$$M = \hat{K}(\frac{r_0}{c(t_2-t_1)})^{n(c(t_2-t_1))}M_{G1}M_{G2}exp(-\delta c(t_2-t_1)). \tag{12}$$

其中， M_{G1} 和 M_{G2} 分别为质点 1 和质点 2 的引力质量， c 为真空光速。 r_0 为长度量纲的可调节参数，例如取 r_0 为太阳系的尺度。 $\hat{K}$ 为待定常数，将在后面给出。 $\delta(>0)$ 为具有长度倒数量纲的极小待定常数。 n 为以某种方式依赖于 t_2-t_1 的无量纲量。例如

$$n = H(\frac{c(t_2-t_1)}{r_0}-1)(1-\frac{r_0}{c(t_2-t_1)}), \tag{13}$$

其中 $H(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geq 0\end{cases}$ 。显然，当 $c(t_2-t_1)<r_0$ 时 $n=0$ ，当 $c(t_2-t_1)\gg r_0$ 时 $n\approx 1$ 。

设质点 2 和质点 1 的世界线分别与 (r_2,θ,φ) 和 (r_1,θ,φ) 处均匀各向同性观者世界线重合。沿径向类光测地线， $cdt=\pm a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$ 。若在 $t_1\sim t_2$ 内 $a(t)$ 的变化可以忽略，则

$$c(t_2-t_1)\approx \pm a(t)\int_{r_1}^{r_2}dr/\sqrt{1-kr^2}\equiv D_{12}(t). \tag{14}$$

$D_{12}(t)$ 为 t 时刻质点 1 与质点 2 的空间距离， $t\in[t_1,t_2]$ 。式 (12) 成为

$$M\approx \hat{K}(\frac{r_0}{D_{12}(t)})^{n(D_{12}(t))}M_{G1}M_{G2}exp(-\delta D_{12}(t)). \tag{15}$$

在宇观尺度，式 (15) 与 (9) 一致。

设试探质点世界线与 $(r=0,\theta=0,\varphi=0)$ 处均匀各向同性观者世界线重合，下面分三种情况分别计算宇宙背景的 $f(P)$ 。假设试探质点受惯性作用所获得的惯性质量具有叠加性，即多个质点对试探质点的惯性作用质量等于每个质点单独存在时对试探质点惯性作用质量之和。

首先考虑 $k=0$ 的情况。在宇观尺度 $n=1$ 。在 t 时刻，宇宙背景对试探质点的惯性作用质量

$$\begin{aligned}M_U(t) &= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}K\frac{M_G}{c(t-\tilde{t})}exp(-\delta c(t-\tilde{t}))\rho_G(\tilde{t})a^3(\tilde{t})r^2\sin\theta drd\theta d\varphi\\ &\equiv f(P)M_G\end{aligned} \tag{16}$$

其中，关于 r 的积分沿试探质点所在点 $P=(t,0,0,0)$ 指向过去的类光测地线进行，该类光测地线与 $\tilde{t}$ 时刻的空间面交点的径向坐标为 r ， $K\equiv\hat{K}r_0$ ， $\rho_G(\tilde{t})$ 为 $\tilde{t}$ 时刻宇宙的引力质量密度， $f(P)\equiv\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty}K\frac{1}{c(t-\tilde{t})}exp(-\delta c(t-\tilde{t}))\rho_G(\tilde{t})a^3(\tilde{t})r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ ，这里 $f(P)$ 也可理解为宇宙背景对质点惯性质量的贡献率。

令 $\eta(t)=\frac{M_U(t)}{\tilde{M}_U(t)}$ ，其中 $\tilde{M}_U(P)$ 为不考虑惯性作用传播的推迟效应，也就是相当于惯性作用沿宇宙的 $R-W$ 空间面瞬时传播得到的宇宙背景在 t 时刻对质点惯性质量的贡献。 $\eta(t)$ 为接近 1 的无量纲参数。通过计算可以得到宇宙背景的

$$f(P)=\eta(t)K\frac{4\pi\rho_G(t)}{\delta^2}. \tag{17}$$

下面考虑 $k=-1$ 的情况。通过计算我们知道当 $a>\frac{2}{\delta}$ 时， $\tilde{M}_{IU}(t)=0$ 。当 $a<\frac{2}{\delta}$ 时， $\tilde{M}_U(t)$ 发散。因此可以排除 $k=-1$ 的情况。

最后考虑 $k=1$ 的情况。由计算我们得到

$$f(P)=\eta(t)4\pi K\rho_G(t)a^2I \tag{18}$$

其中

$$I\equiv\int_{\psi=0}^{\pi}\frac{\sin^2\psi}{\psi}exp(-\delta a(t)\psi)d\psi=\frac{a_1}{\delta^2a^2(t)}(1-e^{-\delta a(t)\pi})-\frac{a_2}{\delta a(t)}e^{-a_3\delta a(t)\pi}, \tag{19}$$

a_1 、 a_2 和 a_3 分别是介于 $\frac{4}{\pi^2}<a_1\le 1$ 、 $\frac{4}{\pi}<a_2<\pi$ 和 $\frac{1}{2}<a_3<1$ 的某个常数。宇宙的体积 $2\pi^2a^3$ 有限。当 a 很小时，例如 $a<r_0$ ，则 $n=0$ 且推迟效应可忽略，即 $\eta(t)\approx 1$ 。则

$$f(P)=\hat{K}2\pi^2\rho_G(t)a^3(t). \tag{20}$$

§2.3 一类非宇宙学红移的伪类星体

银河系内或附近一颗恒星表面的质点惯性质量主要由宇宙背景、银河系和该恒星的惯性作用所贡献。由式 (15) 的因子 $exp(-\delta D_{12}(t))$ 可知远处物质对物体惯性质量的贡献呈指数性减小，可以预期宇宙背景对物体惯性质量的贡献率是很小的。由式 (15) 可得恒星表面质点惯性质量为

$$M_I'=(\alpha_U+K\frac{M_{GM}}{r_M}+K\frac{M_{GS}}{r_0})M_G. \tag{21}$$

其中， α_U 为宇宙背景的 $f(P)$ ， M_{GM} 为银河系引力质量的主要部分， r_M 为该恒星到银心的距离， M_{GS} 为该恒星的引力质量， M_G 为质点的引力质量，其等于该质点在地球上的惯性质量 M_I 。由于恒星表面的里德伯常数 R_q 正比于该恒星表面电子的惯性质量，故 $R_q=(\alpha_U+K\frac{M_{GM}}{r_M}+K\frac{M_{GS}}{r_0})R$（ R 为地球上的里德伯常数）。如果 $\alpha_U+K\frac{M_{GM}}{r_M}+K\frac{M_{GS}}{r_0}<1$ ，则恒星原子光谱会红移。如果 $\alpha_U+K\frac{M_{GM}}{r_M}+K\frac{M_{GS}}{r_0}>1$ ，则恒星原子光谱会出现蓝移。由于银河系是盘状的，银河系内恒星的红移或蓝移可能没有这么简单。对游离于银河系之外的恒星有 $R_q=(\alpha_U+K\frac{M_{GS}}{r_0})R$ ，可能有较大红移。这类恒星由于其高红移而可能被我们误以为是类星体。恒星与类星体的电磁波谱是不一样的，二者容易区分。但若某星体的红移不是宇宙学红移，则其与我们的实际距离与用宇宙学红移估算的距离相去甚远，从而其电磁波谱强度的估计也相差很大。如果有一部分类星体除高红移以外其电磁波谱（考虑到可能的近距离）与恒星并无二致，那么这些类星体可能是假类星体。这些假类星体的红移 $Z_q\equiv\frac{\lambda_q-\lambda}{\lambda}=\frac{1}{\alpha_U+K\frac{M_{GS}}{r_0}}-1$ 。 Z_q 随 M_{GS} 的减小而增大。地球上质点惯性质量主要由宇宙背景、银河系、太阳和地球的惯性作用所贡献，其贡献率分别记为 α_U 、 α_M 、 $\alpha_\odot$ 和 α_E 。作为估算，不妨认为当 M_{GS} 等于太阳引力质量 $M_\odot$ 时 Z_q 达到最大，即最大红移 $Z_{qmax}=\frac{1}{\alpha_U+\alpha_\odot}-1$ 。此最大红移 Z_{qmax} 决定 α_U ，即决定当前宇宙背景的 $f(P)$ 。若取最大红移 $Z_{qmax}=7.1$ ，则 $\alpha_U+\alpha_\odot=\frac{1}{8.1}\approx 0.123$ 。由式 (15) 及相关数据可知， $\alpha_M\approx 10\alpha_\odot$ ， $\alpha_E=K\frac{M_{GE}}{r_0}\ll\alpha_\odot=K\frac{M_\odot}{r_0}$ ， M_{GE} 为地球引力质量。由 $\alpha_U+\alpha_M+\alpha_\odot+\alpha_E=1\approx\alpha_U+\alpha_M+\alpha_\odot$ 可得 $\alpha_M\approx 0.877$ ，当今宇宙 $f(P)=\alpha_U\approx 0.123-0.0877=0.0353$ 。在宇观尺度上涉及到与惯性质量有关的物理量我们需要持审慎的态度。

如果游离于银河系之外的恒星的 X 射线谱由韧致辐射产生，那么其辐射强度反比于带电粒子质量的平方，是普通恒星的 $\frac{1}{0.123^2}\approx 66$ 倍。如果 X 射线谱由同步辐射产生，那么其辐射强度反比于带电粒子质量的 4 次方，是普通恒星的 $\frac{1}{0.123^4}\approx 4369$ 倍。

§2.4 旋涡星系的转动曲线

在不涉及宇宙拓扑结构和强引力的情况下，牛顿引力理论仍然适用。如果将牛顿引力

方程修改为

$$\nabla^2\phi - \delta^2\phi = 4\pi G\rho_G, \tag{22}$$

对点源和受力质点有

$$F \approx G\frac{M_{G1}M_{G2}}{r^2}exp(-\delta r), \tag{23}$$

ϕ 为牛顿引力势，则宇宙不可能形成尺度远大于 δ^{-1} 的结构。为保证超星系团和宇宙空洞的形成， δ^{-1} 应大于宇宙空洞的尺度，即 $\delta^{-1} > 60Mpc$ ， $\delta < 5.4\times10^{-25}m^{-1}$ 。由此可知 δ 取值的大概范围，不妨取 $\delta \sim 5.4\times10^{-25}m^{-1}$ 。请注意，式 (22) 和 (23) 与 Zeeliger 引力理论很像，但区别在于这里的 δ 非常小，仍保持引力为长程力。选取式 (8) 与 (22) 有相同因子 δ ，是基于如下考虑。一方面，宇观结构取决于宇宙中物质的运动和引力，运动与惯性密切相关，即惯性作用和引力的作用程直接决定宇观结构的最大尺度。另一方面，惯性作用和引力作用都直接与引力质量相关，二者可能是同一种作用的两种表现。联系式 (8) 、 (10) 与 (22) 、 (23) ，作为更一般的某种作用的两个方面的引力和惯性作用使我们联想到作为电磁相互作用的两个方面的电和磁。

旋涡星系内一颗恒星的惯性质量主要由宇宙背景和旋涡星系的惯性作用所贡献，恒星惯性质量为

$$M_{IS} = \alpha_U M_G + \hat{K}(\frac{r_0}{r})^{1-\frac{r_0}{r}}M_{GSg}M_G exp(-\delta r). \tag{24}$$

其中，r 为该恒星到旋涡星系中心的距离，M_{GSg} 为旋涡星系内以 r 为半径范围的引力质量，M_G 为该恒星的引力质量。取 $M_{GSg} = 2.786\times10^{41}kg$ 为银河系引力质量，当令 $\alpha_U \approx 0.0353$ ，并令 $x \equiv \frac{r}{r_0}$ 。在旋涡星系核外，由 $M_{IS}\frac{V^2}{r} = G\frac{M_{GSg}M_G}{r^2}exp(-\delta r)$ 和式 (24) 可得恒星绕星系核旋转的速率

$$V = V_0\sqrt{\frac{1}{7.587123\times10^{-12}e^{bx}x + x^{\frac{1}{x}}}}. \tag{25}$$

其中 $V_0 \equiv \sqrt{\frac{G}{K}}$ 与旋涡星系的引力质量 M_{GSg} 无关, 所有旋涡星系的 V_0 相同。根据观测 V_0 大致在 $200\sim300km/s$, 取 $V_0 = 200km/s$ 则可得 $K = 1.67\times10^{-21}m/kg$ 。$b \equiv \delta r_0 = 5.4\times10^{-14}$ 。可调节 r_0 使由式 (25) 所得曲线尽可能与观测结果一致, 例如取 $r_0 \sim 10^{11}m$ 。当 $r \in (0.2, 200)kpc$,

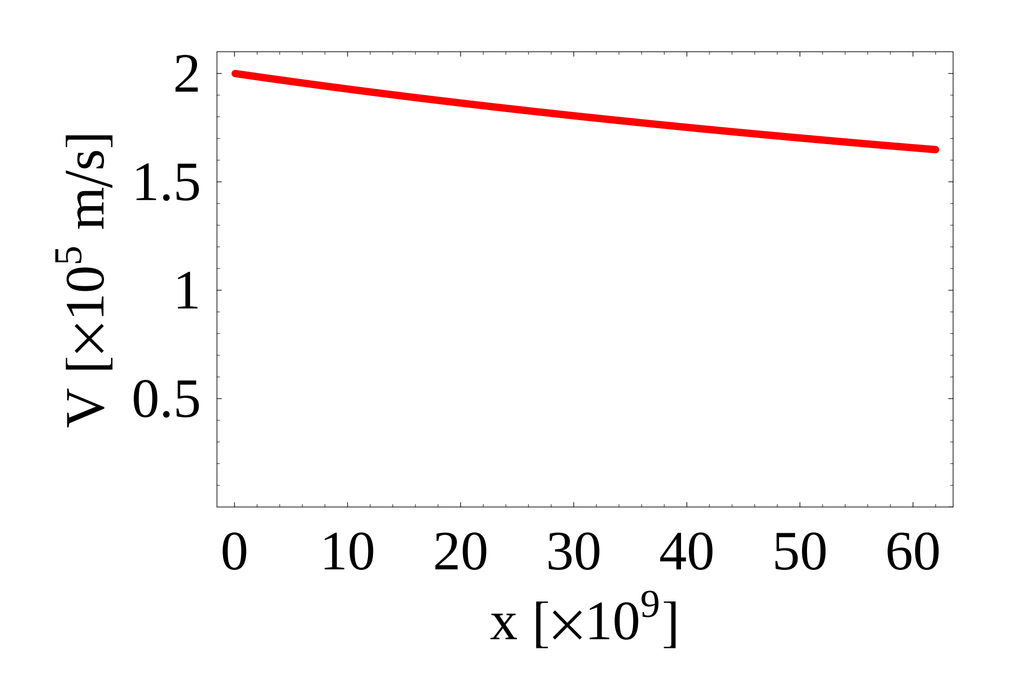


图 1: 类星体最大红移 $Z_{qmax}=7.1$ 因而 $\alpha_U\approx 0.0353$ 时的旋涡星系核外部的转动曲线

则由式 (25) 可画出银河系核外的转动曲线，如图 1 所示。如果 δ 比 $5.4\times 10^{-25}m^{-1}$ 更小，则图 1 的曲线更水平一些。

至于漩涡星系核内的转动曲线可作如下考虑。计算可得，在旋涡星系中心处恒星的惯性质量 $M_{IS}=\frac{3}{2}K\frac{M_{GSg}M_G}{r_N}$ ， r_N 为旋涡星系核半径，在旋涡星系核边缘处恒星的惯性质量 $M_{IS}\simeq\frac{3}{4}K\frac{M_{GSg}M_G}{r_N}$ 。因此，一颗恒星在旋涡星系核范围内的惯性质量可近似认为与恒星所处位置无关。由 $M_{IS}\frac{V^2}{r}=G\frac{M_{GSr}M_G}{r^2}$ 可得旋涡星系核内恒星的转动速率

$$V=\sqrt{G\frac{M_{GSr}M_G}{rM_{IS}}}\simeq\sqrt{G\frac{4\pi\rho_G M_G}{3M_{IS}}}r\propto r. \tag{26}$$

即漩涡星系核内的转动曲线几乎为直线。其中， M_{GSr} 为半径 r 内旋涡星系核的引力质量，ρ_G 为旋涡星系核的平均引力质量密度。

星系团内热气体发射的 X 射线是轫致辐射，频率为 $\frac{1}{2\pi}\omega$ 的辐射强度

$$I\propto\frac{1}{m_e^2}ln\frac{(\sqrt{\varepsilon_k}+\sqrt{\varepsilon_k-\hbar\omega})^2}{\hbar\omega}. \tag{27}$$

m_e 为电子的静止惯性质量，ε_k 为电子平均动能。由于星系团内星系之间电子几乎处于宇宙背景下，电子的 m_e 比在地球上小很多，对观测到的一定强度 I 的 X 射线而言，$\varepsilon_k(=\frac{3}{2}k_BT)(K_B$

为玻尔兹曼常数) 的估计过高，温度 T 实际可能要比我们现在估计的要低得多。也就是说星系团内的热气体并不需要过多的物质来约束。

对宇宙的大尺度泡沫结构，宇宙“空洞”直径达 $1\sim 3$ 亿光年。泡沫壁的某星系的惯性质量 M 主要由最近的星系的惯性作用所贡献， $M\approx K\frac{M_{GM}}{r_M}M_G$ ， M_G 为该星系的引力质量， M_{GM} 为最近星系的引力质量。该星系距最近星系的距离 r_M 远大于银河系半径，若认为 M_{GM} 与银河系引力质量差不多，则 $K\frac{M_{GM}}{r_M}\ll \alpha_M\approx 0.877$ ，即 $M\ll M_G$ 。泡沫壁的发光及其运动取决于 M 。因此，应该有比我们预计要大得多的引力来维持宇宙的大尺度泡沫结构。

暗物质存在的主要依据是漩涡星系的平缓转动曲线、大于预期的引力透镜效应、星系团内热气体的约束、宇宙大尺度泡沫结构免于解体的稳定性以及宇宙早期结构的形成。迄今为止对暗物质的直接观测或实验没有明显的进展，可能的参数空间越来越小 [16] 。本节关于漩涡星系转动曲线、星系团内热气体的温度、宇宙大尺度泡沫结构的讨论以及 §4.1.3 关于远高于广义相对论的引力透镜效应和 §5.2.4 关于宇宙早期结构形成的讨论均不太支持暗物质的存在。

§2.5 牛顿力学中的惯性排斥效应

由牛顿第二定律

$$\mathbf{F}=\frac{d(m\mathbf{V})}{dt}. \tag{28}$$

有

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{F}-\mathbf{V}\frac{dm}{dt}. \tag{29}$$

$\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{V}$ 分别为质点所受合力和相对于惯性系的速度。式 (29) 的第二项可改写为式 (10) 。当物体靠近质量中心，即 $\frac{dm}{dt}>0$ ，则 $-\mathbf{V}\frac{dm}{dt}$ 与 $\mathbf{V}$ 反向。反之，当物体远离质量中心，即 $\frac{dm}{dt}<0$ ，则 $-\mathbf{V}\frac{dm}{dt}$ 与 $\mathbf{V}$ 同向。故 $-\mathbf{V}\frac{dm}{dt}$ 项由于惯性作用而表现为排斥效应。

飞向或飞出银河系的飞船将有附加加速度。由式 (15) 和 (29) 可知飞船由于惯性作用而具有附加加速度

$$\mathbf{a}_I=-\frac{1}{m}\mathbf{V}\frac{dm}{dt}=\frac{1}{m}\mathbf{V}(K\frac{M_{GM}m_G}{r_M}\frac{\dot{r}_M}{r_M})\approx\frac{\dot{r}_M^2}{r_M}\mathbf{e}_r. \tag{30}$$

其中，m 为飞船惯性质量，m_G 、M_{GM} 分别为飞船和银河系的引力质量，r_M 为飞船到银心的距离。例如，取 $V\equiv\dot{r}_M\sim\pm(10^4\sim10^5)ms^{-1}$ ，$r_M\sim10^{20}m$ ，则 $\mathbf{a}_I\sim(10^{-12}\sim10^{-10})ms^{-2}\mathbf{e}_r$ 。先锋号宇宙飞船的反常加速度是否与此有关？飞向银河系中心的旅行者 1 号的速度将可能比我们预计的要慢，比预计的要晚些飞出太阳系。在地球绕日轨道上当地球接近或远离银河系中心，地球会有式 (30) 给出的附加加速度，地球绕太阳运动的轨道可能会有所畸变。月球绕地球的运动轨道也同样可能会有相应的畸变。

当粒子以接近光速的速率沿银河系的径向运动时，会出现粒子惯性质量的变化，其相对变化率由式 (30) 可得

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\sim\pm10^{-12}. \tag{31}$$

此情况下，原子光谱可能会发生 10^{-12} 的红移或蓝移，在磁场中原子核的精细能级间隔的相对变化率为 10^{-12} 。这也许可用磁共振方法来测量被加速器加速的粒子或宇宙射线来检验。

§2.6 物质的质能关系

先考虑闵氏时空。世界线为 $L(\tau)$ 的试探质点相对于观者 Z^a 的 3 速和 3 速率已在 §2.1 中定义。选择洛伦兹惯性坐标系和 4 速为 $Z^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 的惯性观者。试探质点的 3 运动方程由狭义相对论给出

$$\mathbf{f}=\frac{d}{dt}(f(P)\gamma m_{G0}\mathbf{u}). \tag{32}$$

$\mathbf{u}\equiv u^a$ 和 $\mathbf{f}\equiv f^a$ 分别为试探质点的 3 速和受到的 3 力。由式 (32) 可得

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dt+\int_{P_1}^{P_2}c^2\gamma^{-1}m_{G0}df(P)=m_2c^2-m_1c^2. \tag{33}$$

其中， $m_1=f(P_1)\gamma_1m_{G0}$ 和 $m_2=f(P_2)\gamma_2m_{G0}$ 分别为 t_1 和 t_2 时刻试探质点的惯性质量。定义试探质点的能量为

$$E=\gamma[f(P)m_{G0}+m_{in}]c^2. \tag{34}$$

m_{in} 为试探质点惯性自相互作用的静质量 (例如，太阳的 $m_{in}=\hat{K}{m_{G\odot}}^2\sim10^{-2}m_{G\odot}$) 。 E 的改变取决于外力和质点内外的惯性作用。当 γm_{in} 的变化可忽略时，式 (33) 变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}dt+\int_{P_1}^{P_2}c^2\gamma^{-1}m_{G0}df(P)\approx E_2-E_1. \tag{35}$$

对任意时空 (M,g_{ab}) ，任一观者 Z^a 测得试探质点的能量仍定义为

$$E=\gamma[f(P)m_{G0}+m_{in}]c^2. \tag{36}$$

§3 压强对时空弯曲的影响

§3.1 潮汐现象

§3.1.1 牛顿理论的潮汐现象

在小的空间范围 $f(P)$ 的变化可忽略。设引力场中自由下落的相邻质点 1 和 2 的空间位置矢量分别为 $\mathbf{r}(t)\equiv x^i(t)\mathbf{e}_i$ 、 $\mathbf{r}(t)+\mathbf{w}(t)\equiv[x^i(t)+w^i(t)]\mathbf{e}_i$ ， $\mathbf{e}_i$ 是某笛卡尔坐标基矢，则 $\mathbf{w}(t)\equiv w^i(t)\mathbf{e}_i$ 是质点 2 相对于质点 1 的位置矢量， $\frac{d^2\mathbf{w}}{dt^2}$ 是质点 2 相对于质点 1 的潮汐加速度。设牛顿引力势为 ϕ ，由牛顿第二定律和牛顿万有引力定律可得到

$$f(P)\frac{d^2w^i}{dt^2}\approx-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^i}|_{\mathbf{r}}w^j. \tag{37}$$

§3.1.2 一般时空中的潮汐现象

设 (M,g_{ab}) 是任意时空。假定只受引力和惯性作用的自由质点世界线为测地线，即

$$Z^b\nabla_bZ^a=0. \tag{38}$$

其中 $Z^a=(\frac{\partial}{\partial\tau})^a$ 是质点的 4 速， ∇_a 是与 g_{ab} 适配的导数算符。

用 $\gamma_s(\tau)$ 表示引力场中自由质点世界线的光滑单参族，用 Σ 表示由 $\gamma_s(\tau)$ 张成的二维子流形， (τ,s) 即为该二维子流形上点的坐标，且 $[Z,w]^a=0$ 。其中 $w^a\equiv(\frac{\partial}{\partial s})^a$ 。定义邻近自由质点的相对速度和相对加速度 (潮汐加速度) 分别为

$$u^a=Z^b\nabla_bw^a, a^a=Z^b\nabla_bu^a. \tag{39}$$

可以证明测地偏离方程为 [9]

$$a^c=-R_{abd}{}^cZ^aw^bZ^d. \tag{40}$$

§3.2 引力场方程

式 (37) 可改写为

$$a^c = (\frac{\partial}{\partial x^i})^c \frac{d^2 w^i}{dt^2} \approx -\frac{1}{f(P)} w^b \partial_b \partial^c \phi. \tag{41}$$

式 (40) 与 (41) 比较暗示如下对应关系

$$R_{abd}{}^c Z^a Z^d \longleftrightarrow \frac{1}{f(P)} \partial_b \partial^c \phi. \tag{42}$$

指标 c 、 b 缩并可得

$$R_{ad} Z^a Z^d \longleftrightarrow \frac{1}{f(P)} \partial_b \partial^b \phi = \frac{1}{f(P)} \nabla^2 \phi \approx 4\pi \frac{1}{f(P)} \rho_G = \frac{1}{f^2(P)} 4\pi \rho. \tag{43}$$

正如 §1 所提及，压强在引力场方程中的角色也许不是爱因斯坦方程那样。因此，场方程右边可能不会是能动张量 T_{ab} ，而是下面称为“物质张量”的 M_{ab} ，场方程左边自然就不是爱因斯坦张量 G_{ab} 。

我们不讨论一般情况，对理想流体，假设物质张量

$$M_{ab} = (\rho + f_1(p,\rho)) U_a U_b + f_1(p,\rho) g_{ab}. \tag{44}$$

其中 $U^a = g^{ab} U_b$ 为理想流体质元的 4 速， $\rho = M_{ab} U^a U^b$ 为理想流体随动观者测得的惯性质量密度， p 为理想流体压强，

$$f_1(p,\rho) \equiv \hat{\beta} p + f_2(\rho). \tag{45}$$

$\hat{\beta}$ 为常数，其值后面再讨论， $f_2(\rho)$ 与理想流体质元的惯性质量随固有时的变化率和理想流体质元的运动速度有关，其反映式 (10) 相应的惯性排斥效应，这将在宇宙学部分讨论，见式 (105) 。

在上述牛顿近似下， $\rho \approx M_{ab} Z^a Z^b$ ，则式 (43) 成为

$$R_{ad} Z^a Z^d \longleftrightarrow \frac{1}{f^2(P)} 4\pi M_{ab} Z^a Z^b. \tag{46}$$

由式 (46)，假设引力场方程为

$$R_{ab} + \alpha R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \tilde{\kappa} M_{ab}. \tag{47}$$

其中， $\tilde{\kappa} \equiv \frac{\kappa}{f^2(P)}$ ， α 和 κ 均为待定常数， Λ 为标量场。当 Λ 为常数时即为宇宙学常数。

由式 (47) 可得

$$R = \frac{\tilde{\kappa}M - 4\Lambda}{4\alpha + 1}. \tag{48}$$

其中 $M \equiv M_a{}^a$ 。对理想流体和 4 速为 Z^a 的任一观者有

$$R_{ab}Z^aZ^b = \frac{\gamma^2(4\alpha+1) - \alpha}{4\alpha+1}\tilde{\kappa}\rho + \tilde{\kappa}(\gamma^2 - \frac{\alpha+1}{4\alpha+1})f_1(p,\rho) + \frac{\Lambda}{4\alpha+1}. \tag{49}$$

其中， $\gamma \equiv -U^aZ_a$ 。为避免理论出现时空奇点，我们要求尽可能不满足奇点定理的条件，例如 $R_{ab}Z^aZ^b < 0$ 。在式 (49) 中 $\gamma \geq 1$ ，要使 $R_{ab}Z^aZ^b < 0$ 成立， γ 应尽可能小。取 $Z^a = U^a$ ，即 $\gamma = 1$ 。由式 (49) 可知， $R_{ab}Z^aZ^b < 0$ 成立意味着

$$\frac{3\alpha+1}{4\alpha+1}\tilde{\kappa}\rho + \tilde{\kappa}\frac{3\alpha}{4\alpha+1}f_1(p,\rho) + \frac{\Lambda}{4\alpha+1} < 0. \tag{50}$$

在后面的宇宙学部分由式 (88) 可以看出，式 (50) 意味着宇宙加速膨胀。对较小空间范围内的尘埃物质，在忽略 Λ 和牛顿近似下 $\gamma \equiv -U^aZ_a \approx 1$ ， $f_1(p,\rho) \approx 0$ ，由式 (49) 有

$$R_{ab}Z^aZ^b \approx \frac{3\alpha+1}{4\alpha+1}\tilde{\kappa}\rho. \tag{51}$$

与 (43) 比较可得

$$\kappa\frac{3\alpha+1}{4\alpha+1} = 4\pi. \tag{52}$$

§3.3 真空引力场方程

真空 $M_{ab} = 0$ ，并考虑 $\Lambda = 0$ ，引力场方程 (47) 成为

$$R_{ab} = 0. \tag{53}$$

与爱因斯坦真空引力场方程相同。

§3.4 真空弱场近似

考虑弱场低速情况。

在弱引力场情况下时空度规 g_{ab} 非常接近于闵氏度规 η_{ab} ，用下式定义 γ_{ab}

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}. \tag{54}$$

γ_{ab} 很小。

选择 η_{ab} 的整体惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 的 t 坐标曲线为引力源的随动惯性观者的世界线。

(1) 弱场意味着式 (54)；

(2) 低速意味着场源和物体低速运动，场源低速运动导致时空几何缓慢变化，$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t} \approx 0$，物体低速运动导致物体 4 速 $U^a = (\frac{\partial}{\partial \tau})^a$ 与惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 的观者 4 速 $Z^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 近似相等，即物体的固有时 τ 与惯性坐标时 t 近似相等，$\tau \approx t$ 。

在真空引力场中自由质点的世界线为测地线，在 $\{t, x^i\}$ 下表为

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \tag{55}$$

其中 τ 为质点固有时。由于低速 $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \approx 0$，式 (55) 成为

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu{}_{00}. \tag{56}$$

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}\eta^{ij}(\gamma_{j0,0} + \gamma_{0j,0} - \gamma_{00,j}) \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i}. \tag{57}$$

忽略 $f(P)$ 随 t, x^i 的变化，由式 (56) 和 (57) 可得

$$\frac{d}{dt}[M_G f(P)\frac{dx^i}{dt}] \approx \frac{1}{2}\frac{\partial(M_G f(P)\gamma_{00})}{\partial x^i}. \tag{58}$$

与牛顿引力理论中质点运动方程

$$\frac{d}{dt}[M_G f(P)\frac{dx^i}{dt}] \approx -\frac{\partial(M_G \phi)}{\partial x^i}. \tag{59}$$

比较可得

$$\phi \approx -\frac{1}{2}f(P)\gamma_{00}. \tag{60}$$

这里 $f(P)$ 视作常数。

§4　静态球对称度规

对静态球对称时空 (M, g_{ab})，度规线元具有如下形式

$$ds^2 = -e^{2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2). \tag{61}$$

$A(r)$ 和 $B(r)$ 是 r 的待定函数。

§4.1 史瓦西真空解及其三个验证

§4.1.1 史瓦西真空解

由于真空引力场方程 (53) 与爱因斯坦真空引力场方程相同，静态球对称真空度规仍具有如下形式

$$ds^2 = -(1+\frac{C}{r})dt^2 + (1+\frac{C}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2). \tag{62}$$

其中 C 为待定常数。当 r 很大且 $f(P)$ 可视为常数 f_0 时，由式 (60) 和牛顿引力势 $\phi = -\frac{M_G}{r}exp(-\delta r) \approx -\frac{M_G}{r}$ 可得 $g_{00} = -1 - \frac{C}{r} = \eta_{00} + \gamma_{00} = -1 - \frac{2}{f_0}\phi = -1 - (-\frac{2M_G}{f_0})\frac{1}{r}$ ，从而 $C = -\frac{2M_G}{f_0}$ 。因此，静态球对称真空度规近似为

$$ds^2 = -(1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})dt^2 + (1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2). \tag{63}$$

此即史瓦西时空的线元，史瓦西半径 $r_S = \frac{2GM_G}{c^2 f_0}$ 。式 (63) 中 f_0 为 r 很大处的 $f(P)$ 值并可视作常数。讨论太阳系内的问题 $f_0 = 1$ 。讨论球对称星系时 f_0 为宇宙背景的 $f(P)$ ，即 $f_0 = \alpha_U \approx 0.0353$ ，宇宙背景下星体的史瓦西半径要比广义相对论的大约 2 个数量级。若某些类星体如 §2.3 讨论的那样是游离于银河系之外的恒星，那么 $f_0 = \alpha_U \approx 0.0353$ 。

对球对称球壳内的真空区域式 (62) 中 $C = 0$ ，否则 $r = 0$ 处 g_{00} 和 g^{11} 发散。则均匀球壳内真空区域为闵氏度规。

§4.1.2 史瓦西时空的守恒量

自由质点的世界线 $\gamma(\tau)$ 是类时测地线，光子的世界线 $\gamma(\beta)$ 是类光测地线。可选取史瓦西坐标使自由质点世界线 $\gamma(\tau)$ 的参数表达式为

$$t = t(\tau), r = r(\tau), \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \varphi(\tau). \tag{64}$$

设 $U^a = (\frac{\partial}{\partial\tau})^a$ 。对光子，$\tau = \beta$ ，$U^a = (\frac{\partial}{\partial\beta})^a = K^a$ 是光子的 4 波矢。$\xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 和 $\xi^a_\varphi \equiv (\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ 是史瓦西时空的 Killing 矢量场，可定义测地线 $\gamma(\tau)$ 上的 2 个常量，即守恒量

$$E := -g_{ab}(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{\partial}{\partial\tau})^b = (1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})\frac{dt}{d\tau}. \tag{65}$$

$$L := g_{ab}(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a(\frac{\partial}{\partial\tau})^b = r^2\frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{66}$$

相应于静态 Killing 矢量场 ξ^a 的静态观者的 4 速为

$$Z^a = \chi^{-1}\xi^a. \tag{67}$$

其中， $\chi \equiv (-\xi^b\xi_b)^{1/2}$ 。定义

$$-\kappa := g_{ab}U^aU^b = -(1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})(\frac{dt}{d\tau})^2 + (1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{d\tau})^2. \tag{68}$$

将式 (65) 和 (66) 代入式 (68) 可得

$$-\kappa = -(1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})^{-1}E^2 + (1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})^{-1}(\frac{dr}{d\tau})^2 + \frac{L^2}{r^2} = \begin{cases} -1, & \text{类时测地线} \\ 0, & \text{类光测地线} \end{cases}. \tag{69}$$

§4.1.3 引力红移、水星近日点进动和星光偏折

设 G 和 G' 是任意稳态时空中任意 2 个稳态观者， G 在 P 时发出的光子在 P' 时到达 G' 。以 Z^a 代表观者 4 速，λ 和 λ' 分别为 G 和 G' 测得光子的波长，则由式 (63) 和 (67) 可得

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = (1-\frac{2M_G}{r'}\frac{1}{f_0})^{1/2}(1-\frac{2M_G}{r}\frac{1}{f_0})^{-1/2}. \tag{70}$$

在太阳系内 $f_0 = 1$ ，结果与爱因斯坦理论相同。

由式 (63) 和 (69) 通过计算可得到水星近日点在每周期内的进动角为

$$\Delta\varphi_P \approx 6\pi M_G^2/[f_0^2L^2]. \tag{71}$$

M_G 为太阳引力质量，在太阳系内 $f_0 = 1$ ，与爱因斯坦理论的结果相同。

从式 (63) 和 (69) 出发，计算可求得遥远光子在真空球对称引力场作用下偏折角为

$$\theta \approx \frac{4M_G}{lf_0}. \tag{72}$$

其中 l 为积分常数，其近似为遥远光子不偏折时的轨迹与球对称引力中心最近的距离。在太阳系内 $f_0 = 1$ ，结果与爱因斯坦理论的结果相同。对于星系和星系团的外部区域几乎为宇宙背景， $f_0 \approx 0.0353$ ，其引力透镜效应是爱因斯坦理论的 $\frac{1}{0.0353} \approx 28.33$ 倍。对某些我们以为是类星体但其实是银河系外的孤立恒星，其引力透镜效应是银河系内恒星的不小于 $\frac{0.9123}{0.0353} \approx 25.84$ 倍。对子弹星系团 1E 0657-556 ，考虑到其中星系普通物质的引力透镜效应可能是不考虑惯性效应情况的 28.33 倍，也许会给出不同于我们目前所认知的物质分布图。

§4.2 静态球对称恒星内部状态方程

将星内物质场看作理想流体，其物质场张量如式 (44) 。不考虑 Λ ，将式 (61) 和 (44) 代入引力场方程 (47) 可得静态球对称星体内部度规所满足的如下方程组

$$e^{-2B}[-(1+2\alpha)A''+(1+2\alpha)A'B'-(1+2\alpha)A'^2-(1+2\alpha)2r^{-1}A'+4\alpha r^{-1}B'-2\alpha r^{-2}]+2\alpha r^{-2}=-\tilde{\kappa}\rho. \tag{73}$$

$$e^{-2B}[-(1+2\alpha)A''+(1+2\alpha)A'B'-(1+2\alpha)A'^2+(1+2\alpha)2r^{-1}B'-4\alpha r^{-1}A'-2\alpha r^{-2}]+2\alpha r^{-2}=\tilde{\kappa}f_1(p,\rho). \tag{74}$$

$$-e^{-2B}[(1+2\alpha)r^{-2}+(1+4\alpha)r^{-1}(A'-B')+2\alpha A''-2\alpha A'B'+2\alpha A'^2]+(1+2\alpha)r^{-2}=\tilde{\kappa}f_1(p,\rho). \tag{75}$$

其中， $A'\equiv\frac{dA}{dr}$ ， $A''\equiv\frac{d^2A}{dr^2}$ ， $B'\equiv\frac{dB}{dr}$ 。静态球对称恒星内部状态由 $A(r)$ 、 $B(r)$ 、 $\rho(r)$ 和 $p(r)$ 等 4 个函数决定，它们满足式 (73) 、 (74) 、 (75) 和物态方程 $F(p,\rho)=0$ 等 4 个方程。

现讨论如下几点。

(1) 由式 (73) 、 (74) 、 (75) 和 (7) ，忽略纯辐射压强 p_R 并考虑 $f_2(\rho)=0$ 可得到

$$\frac{d}{dr}(re^{-2B})=1-\tilde{\kappa}r^2\frac{1+6\alpha}{1+4\alpha}[\frac{1}{2}+\frac{3(1+2\alpha)}{6\alpha-1}\xi]\rho \tag{76}$$

从后面的讨论可知 α 有三个可能取值范围，以 $\alpha=-\frac{1}{5}$ 为例，由式 (76) 积分并恢复为国际单位制，可得

$$g_{11}(r)=e^{2B}=(1+\frac{G}{c^2r}\int_0^r(\frac{1}{2}-\frac{9}{11}\xi)\tilde{\kappa}r^2\rho dr)^{-1}, \tag{77}$$

$\xi<\frac{1}{3}$ ，故 $g_{11}>0$ 。式 (77) 积分的第一项所含因子 ρ 代表引力，第二项所含因子 $\xi\rho$ 代表压强。式 (77) 表明引力使得 g_{11} 偏离平直时空而压强削弱这种偏离。由式 (73) 、 (74) 和 (75) 可得到

$$A'=\frac{1+2\alpha}{1+6\alpha}B'-\frac{1}{1+6\alpha}\tilde{\kappa}rf_1(p,\rho)e^{2B}+\frac{1+4\alpha}{1+6\alpha}r^{-1}(e^{2B}-1). \tag{78}$$

上式右边为实数，只要选取星体表面 $r=R$ 处 $A(R)$ 为实数，对式 (78) 积分所得 $A(r)$ 必为实数，故

$$g_{00}=-e^{2A}<0. \tag{79}$$

在星体演化过程中星体内部及其表面始终保持 $g_{00} < 0$ 和 $g_{11} > 0$，这说明无论星体是否收缩进入视界面内星体及其表面光锥始终朝外而不存在陷俘面。演化过程中，当星体半径大于史瓦西半径时，只要温度不为 0K 星体就会由于热辐射降低温度而收缩。当温度降为 0K 时星体停止热辐射，此时，如果电子简并压能抗衡引力则形成白矮星，当电子简并压不能但中子简并压能抗衡引力则形成中子星。如果中子简并压也不能抗衡引力，则星体表面将收缩进入事件视界形成黑洞。由于不存在直接热辐射，进入视界面的星体继续收缩而升温。由于夸克禁闭，不会因为中子动能变大而击碎中子。这样中子动能可以无限制升高直至中子热运动压强远超中子简并压抗衡引力而逐渐停止收缩。 Hawking 辐射的结果是视界面外真空的负能粒子进入黑洞与星体的正能粒子湮灭。因此星体 Hawking 辐射损失能量的结果是减少引力质量 m_G 而不是减少星体内物质的热运动能量。 Hawking 温度会随 m_G 减少而升高，但星体的热力学温度会由于不存在直接的热辐射和 m_G 减少引起星体膨胀而减小。因此，黑洞的 Hawking 温度不同于热力学温度。随着 m_G 的减少，星体的史瓦西半径会减小，但星体却逐渐膨胀，并降低星体的热力学温度，直到星体半径大于史瓦西半径。然后重新开始热辐射，星体再收缩，直至收缩进入星体的视界面内。周而复始，直到最终 Hawking 辐射使得再从视界面内冒出的星体由于中子简并压能抗衡引力而形成中子星。由于 Hawking 辐射非常弱，此过程非常缓慢，观测到的黑洞几乎是一种相对稳定的黑洞。还有一种情况，形成大黑洞的星体在收缩到快进入其视界面时质量密度并不大，当其进入视界面形成黑洞时上一级核反应已停止而下一级核反应还未点燃。此时，星体在其视界面内收缩会点燃下一级核反应，则星体会急剧膨胀并从视界面突然冒出，并大量释放能量和抛出物质，剩下密度极高的星核。此过程可能是一种类似超新星爆发或活动星系核的黑洞爆发。因此，星体演化的结局是白矮星或中子星，黑洞只是演化的中间阶段。

由于黑洞没有奇点，则黑洞会有一个硬核。当两个黑洞相遇时，猜想有两种可能。第一种，两个黑洞会并和，但两个黑洞核会在新的事件视界面内反复反弹最后再并和在一起，这种情况的引力波会有回声；第二种，两个黑洞有可能会发生碰撞后再分开成为两个新的黑洞，这种情况的引力波没有回声。

(2) 由 $\nabla^a T_{ab}=0$ 可得

$$\frac{dp}{dr}=-(p+\rho)\frac{dA}{dr}. \tag{80}$$

非相对论情况下 $p\ll\rho$ ，静态 $f_2(\rho)=0$ ，由式 (73) 、 (74) 、 (75) 和 (80) 可得

$$\frac{dp}{dr}\approx\rho B'-\frac{1}{2}\tilde{\kappa}\rho^2 re^{2B}. \tag{81}$$

考虑星体惯性质量密度大致均匀，即 $\rho\sim\overline{\rho}$ ，则 $m(r)\approx\frac{4\pi r^3}{3}\rho$ 。考虑 $f(P)$ 随 r 的变化可忽略的情况，由式 (76) 、 (81) 和 (52) 可得

$$\frac{dp}{dr}\approx-\frac{m_G\rho_G}{r^2}. \tag{82}$$

式 (82) 即牛顿力学的结果。

(3) 由 $\Lambda=0$ 的引力场方程和 $\nabla^a G_{ab}=0$ ，并考虑 $\nabla^a\tilde{\kappa}\approx 0$ 的近似可得

$$(\frac{\partial}{\partial r})^b\nabla^a M_{ab}\approx\frac{1+2\alpha}{2\tilde{\kappa}}\frac{dR}{dr}. \tag{83}$$

由式 (44) 可得到

$$(\frac{\partial}{\partial r})^b\nabla^a M_{ab}=(\rho+f_1(p,\rho))\frac{dA}{dr}+\frac{df_1(p,\rho)}{dr}. \tag{84}$$

将 R 的表达式代入 (83) 并由式 (73) 、 (74) 和 (84) 可得到

$$(\rho+f_1(p,\rho))\frac{dA}{dr}+\frac{df_1(p,\rho)}{dr}\approx\frac{1}{2\tilde{\kappa}}\frac{d}{dr}[\tilde{\kappa}(f_1(p,\rho)-\rho)+2r^{-1}(B'-A')e^{-2B}-2r^{-2}e^{-2B}+2r^{-2}]. \tag{85}$$

在牛顿近似下，并考虑 $\rho\sim\overline{\rho}$ ，即 $\frac{d}{dr}\frac{m}{r^3}\sim\frac{d\rho}{dr}\approx 0$ ，利用式 (45) 、 (52) 、 (77) 、 (78) 和 (85) 可得

$$\frac{6\alpha-1}{2(1+6\alpha)}\hat{\beta}\frac{dp}{dr}\approx-\frac{m_G\rho_G}{r^2}. \tag{86}$$

与式 (82) 比较可得

$$\hat{\beta}=\frac{2(1+6\alpha)}{6\alpha-1}. \tag{87}$$

(4) 式 (50) 中第一项为质量项是引力效应。引力是奇点的根源，其效应促成奇点定理的条件成立，即有使 $R_{ab}Z^aZ^b>0$ 的倾向。应有 $\frac{3\alpha+1}{4\alpha+1}\tilde{\kappa}>0$ ，与前面的 $\kappa\frac{3\alpha+1}{4\alpha+1}=4\pi$ 一致。第二项为压强和惯性项是排斥效应，其效应是削弱奇点形成的条件，即有使 $R_{ab}Z^aZ^b<0$ 的倾向。应有 $\tilde{\kappa}\frac{3\alpha}{4\alpha+1}\hat{\beta}<0$ 。由此可知 α 的取值只有三种情况：当 $\kappa>0$ 时， $-\frac{1}{4}<\alpha<-\frac{1}{6}$ 和 $0<\alpha<\frac{1}{6}$ 。当 $\kappa<0$ 时， $-\frac{1}{3}<\alpha<-\frac{1}{4}$ 。

§5　宇宙演化

§5.1　宇宙动力学方程

宇宙物质可视为理想流体，将 Robertson-Walker 度规 (11) 和理想流体物质场张量 (44) 代入引力场方程 (47) 可得

$$-\frac{3\ddot{a}}{a}=\tilde{\kappa}\frac{(1+3\alpha)\rho+3\alpha f_1(p,\rho)}{1+4\alpha}+\frac{\Lambda}{1+4\alpha}. \tag{88}$$

$$a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k=\tilde{\kappa}\frac{\alpha\rho+(1+\alpha)f_1(p,\rho)}{1+4\alpha}a^2-\frac{\Lambda}{1+4\alpha}a^2. \tag{89}$$

式 (88) 和 (89) 是决定宇宙尺度因子 $a(t)$ 演化的基本方程。由式 (50) 和 (88) 可知，若违背奇点定理的条件之一，即 $R_{ab}Z^aZ^b<0$ ，则宇宙加速膨胀或减速收缩。

由式 (88) 和 (89) 可得到

$$(1+2\alpha)\frac{3\ddot{a}}{a}+\frac{6\alpha\dot{a}^2}{a^2}+\frac{6\alpha k}{a^2}+\Lambda=-\tilde{\kappa}\rho. \tag{90}$$

由式 (91) 或 (125) 和 (126) 可看出方程 (90) 只通过 $\eta(t)$ 微弱地依赖于 ρ 。如果 §6 的猜想成立，则 $\eta(t)=1$ ，方程 (90) 与 ρ 无关，即 $a(t)$ 的演化与宇宙内容物无关。这说明物质及其运动对时空的影响是局部的，对宇宙的整体演化并没有影响。这可能得到丘成桐证明的卡拉比猜想的支持，即一个没有质量的封闭空间可以弯曲。同时也说明 $k=0$ 或 $k=1$ 是宇宙的固有属性，与宇宙物质无关。因此，不存在临界质量密度，不存在宇宙的平直性疑难。由后面的讨论我们知道宇宙演化的视界疑难也不复存在。如果 $a(t)$ 的演化与宇宙内容物无关，那么宇宙演化不需要也不会产生暴涨过程。暴涨所产生的原初引力波可能是观测不到的。

§5.2　$k=0$ 的宇宙演化

下面以 $k=0$ ， $\alpha=-\frac{1}{5}$ 和 $\Lambda=0$ 为例作较详细的讨论。在 §5.3 将就 $k=1$ ， $\alpha=-\frac{1}{5}$ 和 $\Lambda=0$ 的情况作一些定性的研究。

§5.2.1　$a(t)$ 的演化

$$\tilde{\kappa}=\kappa/f^2(P)=\kappa/\frac{4\pi K\eta(t)\rho}{\delta^2} \tag{91}$$

将式 (91) 代入方程 (90) 可得

$$-\frac{3}{\beta'}\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{2}{\beta'}(\frac{\dot{a}}{a})^2-\frac{5}{3}=0. \tag{92}$$

其中， $\beta'\equiv\frac{\kappa}{4\pi}\beta$， $\beta\equiv\frac{\delta^2}{K\eta(t)}$ 。如果惯性作用在真空中以光速 c 传播，那么会存在“推迟”效应。计算宇宙背景在 t 时刻对试探质点惯性质量的贡献时，越远处的物质应该是越早于 t 时刻的贡献。这就是“推迟”效应，其后果体现在式 (17) 和 (18) 中的 $\eta(t)$ 。宇宙膨胀或者收缩越慢“推迟”效应越小。再考虑到式 (12) 中的衰减因子 $exp(-\delta c(t_2-t_1))$ ，越远即越“推迟”的物质对试探质点惯性质量的贡献越小。因此，宇宙膨胀或者收缩越慢时，因子 $\eta(t)$ 变化越缓慢，可视为常数。由于体元 ε 内引力质量基本不随 t 变化，即 $\frac{d}{dt}(\varepsilon\rho_G)=0$ ，由此可得 $\dot{\rho_G}/\rho_G\sim\dot{\varepsilon}/\varepsilon=3H$ 。 $H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ 是哈勃参数。如果认为距离 $>1/\delta$ 的物质对试探质点惯性质量的影响可忽略，则惯性作用传播距离 $1/\delta$ 所用时间 $\frac{1/\delta}{c}$ 内引力质量密度的相对变化为 $(\dot{\rho_G}/\rho_G)\frac{1/\delta}{c}\sim\frac{3H}{c\delta}$ 。若 $\frac{3H}{c\delta}\ll 1$ ，则可认为宇宙膨胀很慢。取当今 $H=71km.s^{-1}.Mpc^{-1}$ ，则当今 $\frac{3H}{c\delta}\sim 4\times 10^{-2}$ ， $\eta(t)$ 可视为缓变函数。作为近似，下面将 $\eta(t)$ 视为常数。

解方程 (92) 可得

$$a(t)=A|\cos(\omega t+\varphi)|^3. \tag{93}$$

其中， A 和 φ 是由某时刻 t_0 的 $a(t_0)$ 和 $H(t_0)\equiv\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$ 所确定的常数， $\omega\equiv\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5\beta}{6}}$ 。

不失一般性，考虑 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ ， $0\leq\omega t\leq\pi$ ，即讨论一个周期。则

$$a(t)=A\sin^3(\omega t). \tag{94}$$

现讨论如下几个方面

(1) 当 $a(t)=0$ 时， $\dot{a}(t)=0$ 和 $\ddot{a}(t)=0$ ，没有大爆炸和大挤压。

(2) 哈勃参数

$$H(t)=\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}=3\omega\cot(\omega t). \tag{95}$$

设 t 的当今值为 t_{td} ，其为本周期自膨胀以来所用时间，可称为宇宙年龄。取 $H_0=H(t)|_{t=t_{td}}=71km.s^{-1}.Mpc^{-1}$ ，可得到

$$t_{td}\approx 412\text{亿年}. \tag{96}$$

(3) 宇宙加速膨胀阶段满足的条件很容易求得

$$0 < \tan(\omega t) < \sqrt{2}. \tag{97}$$

由式 (95) 可得

$$\tan(\omega t_{td}) = \frac{n\omega}{H_0} = \frac{\delta V_0}{\sqrt{\eta(t)}\sqrt{1.2}H_0} = 7.931 \times 10^{22}\frac{\delta}{\sqrt{\eta(t)}}. \tag{98}$$

$\eta \sim 1$ ，由 $\delta \sim 5.4 \times 10^{-25}$ 可知当今宇宙正处于加速膨胀阶段。这里不需要暗能量。

(4) $a(t)$ 的演化是周期性的，其周期

$$T = \frac{3\pi}{\delta V_0}\sqrt{\frac{6}{5}\eta(t)} \approx 30297.8\text{亿年}. \tag{99}$$

(5) 可以证明， $r = 0$ 处的各向同性观者在 t 时刻总能看到任意 r 处的物质在 $t_0 = (2A\omega^3 r + \frac{1}{t^3})^{-\frac{1}{2}}$ 之后某时刻 t_1 发出的光。即 $r = 0$ 处的各向同性观者无视界，因而不存在视界疑难。

(6) 宇宙时空的测地线由如下 4 个方程描述

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + a\dot{a}(\frac{dr}{d\tau})^2 + a\dot{a}r^2(\frac{d\theta}{d\tau})^2 + a\dot{a}r^2\sin^2\theta(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 = 0, \tag{100}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} - r(\frac{d\theta}{d\tau})^2 - r\sin^2\theta(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 = 0, \tag{101}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta(\frac{d\varphi}{d\tau})^2 = 0, \tag{102}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \tag{103}$$

其中 τ 为测地线的仿射参数。当 $a(t) \to 0$ 时， $\dot{a}(t) \to 0$ ， $\frac{\dot{a}}{a} \to \infty$ 。测地线在 $a(t) = 0$ 处不连续，但通过分析我们知道只要重新定义 $\frac{d^2t}{d\beta^2}|_{a=0} = 0$ 则在 $a(t) = 0$ 处测地线是可延拓的。宇宙时空不存在测地线不完备的时空奇点，但 $a(t) = 0$ 处仍然存在发散的奇异性。例如，当 $t \to 0$ 时， $\Re \equiv R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 9(\frac{\ddot{a}}{a})^2 + 3a^{-4}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)^2$ 是发散的。虽然我们没有避开发散奇点，但我们避开了测地线不完备的奇异性。

§5.2.2 ρ 的演化

设宇宙理想流体的随动体元 ΔV 内的惯性质量为 Δm，则

$$\frac{1}{\Delta m}\frac{d\Delta m}{dt}=\frac{1}{a^3(t)r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\rho}\frac{d[a^3(t)r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi\rho]}{dt}=\frac{1}{a^3(t)\rho}\frac{d[a^3(t)\rho]}{dt}. \tag{104}$$

参照式 (29) 右边第二项和式 (104)，并从量纲上考虑，可设式 (45) 中的

$$f_2(\rho)=-\frac{\lambda}{\beta a^3}\frac{d(a^3\rho)}{d\tau}\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}=-\frac{\lambda}{\beta a^3}\frac{d(a^3\rho)}{dt}\frac{\dot a}{a}. \tag{105}$$

其中 τ 为随动体元的固有时， λ 为正的无量纲待定常数。将式 (91) 代入式 (88) 可得

$$\frac{2\ddot a}{\beta a}+\frac{2}{3}=\frac{1}{\rho}f_1(p,\rho). \tag{106}$$

下面分别讨论辐射为主和物质为主时期 ρ 的演化。

辐射为主时期，粒子为相对论粒子。压强 $p=\frac{1}{3}\rho$ 。将式 (87) 、 (105) 、 (45) 和 (94) 代入 (106) 可得

$$\frac{\lambda}{a^3\rho}\frac{d(a^3\rho)}{dt}=-4\omega\cot(\omega t)-\frac{2}{11}\omega\tan(\omega t). \tag{107}$$

可解得

$$\rho(t)=\rho_0(\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t)})^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}}. \tag{108}$$

其中 $\rho_0\equiv\rho(t_0)$ 为 ρ 在某给定时刻 t_0 的值。

物质为主时期，压强 p 可忽略。

$$\frac{1}{\rho}f_1(p,\rho)\approx-\frac{\lambda}{\beta a^3\rho}\frac{d(a^3\rho)}{dt}\frac{\dot a}{a}. \tag{109}$$

将式 (94) 和 (109) 代入 (106) 可解得

$$\rho(t)=\rho_0(\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t)})^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{5\lambda}}. \tag{110}$$

式 (108) 和 (110) 中因子 $9+\frac{4}{\lambda}$ 只是对 9 的修正，应该有 $\frac{4}{\lambda}\ll 9$ 。

§5.2.3 宇宙的热历史

对宇宙的热历史只做一些原则性说明。

宇宙的每一周期从 $\dot{a}(t)=0$ 开始膨胀，所有粒子处于热平衡。随着宇宙的膨胀，逐渐形成核子、原子核和原子等等。该过程有几个关键的环节：中微子退耦、氘关卡、光子退耦。对于单组份气体，每一粒子的平均碰撞频率

$$\Gamma = n < v\sigma(v) > . \tag{111}$$

其中 n 是靶粒子数密度， v 和 $\sigma(v)$ 分别是相对速率和碰撞截面， $< \ldots >$ 代表对速率分布的平均，与气体温度有关。某种粒子不满足 $\Gamma \gg H$ 的条件后便从热平衡中退耦。作为估算，光子退耦以前，将物质粒子都视为相对论粒子，即那阶段的宇宙视为辐射为主。物质密度 ρ 的演化采用式 (108) 。

辐射为主时期，物质粒子为相对论粒子，其满足

$$\rho = \sigma T^4. \tag{112}$$

其中， T 为辐射温度， $\sigma \equiv (\pi^2/30)N_{eff}$ ， N_{eff} 由静止能量远小于 k_BT 的物质粒子种类数决定的常系数。由式 (108) 和 (112) 可得辐射为主时期物质温度的演化规律

$$T^4(t) = \frac{\rho_0}{\sigma}(\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t)})^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}}. \tag{113}$$

中微子在时刻 t_ν 和温度 T_ν 退耦后，中子数 n_n 和质子数 n_p 之比冻结在

$$n_n/n_p = e^{-\Delta m/T_\nu}. \tag{114}$$

其中 $\Delta m \equiv (m_{Gn} - m_{Gp})f(P)|_{t_\nu}$ 为时刻 t_ν 中子和质子的静止惯性质量之差， m_{Gn} 和 m_{Gp} 分别为中子和质子的引力质量。 $f(P)|_{t_\nu}$ 由式 (17) 和 (108) 给出

$$f^2(P)|_{t_\nu} = \eta(t_\nu)K\frac{4\pi\rho(t_\nu)}{\delta^2} = \eta(t_\nu)K\frac{4\pi}{\delta^2}\rho_0(\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t_\nu)})^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_\nu)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}} \tag{115}$$

由于宇宙早期 $f(P)$ 比较大，则 Δm 比较大， T_ν 比大爆炸理论估计的要高。取氦丰度 $Y_4 = 2\frac{n_n}{n_p}(1+\frac{n_n}{n_p})^{-1} = 0.221 \sim 0.243$ ，则可得到 $\frac{n_n}{n_p} = \frac{Y_4}{2-Y_4}$ 。设氘的光分裂在时刻 t_D 和温度 T_D 失

效，光子在时刻 t_{ph} 和温度 T_{ph} 退耦。由于宇宙早期膨胀非常缓慢，光子和中微子退耦的过程比较长，物质密度的涨落会在退耦后的背景辐射和背景中微子留下各向异性的痕迹。取中微子种类数 $N_\nu = 3$，选取氘的光分裂失效时辐射气体中核子与光子的数目比 ϕ 为某个合适的值，并取今天的光子背景温度 $T_{td} = 2.735K$。考虑上述诸因素可得如下方程

$$\phi = \frac{\frac{\rho}{m_{Gp}f(P)|_{t_D}}}{\frac{\rho_R}{k_B T_D}} = \frac{\sigma k_B T_D}{\sigma_R m_{Gp} f(P)|_{t_D}} = \frac{\sigma k_B T_D}{\sigma_R m_{Gp}}[\frac{\delta^2}{4\pi K \rho_0 \eta(t_D)}]^{1/2}(\frac{\sin(\omega t_D)}{\sin(\omega t_0)})^{\frac{9}{2}+\frac{2}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_0)}{\cos(\omega t_D)}|^{\frac{1}{11\lambda}}. \quad (116)$$

$$T_\nu^4 = \frac{\rho_0}{\sigma}|\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t_\nu)}|^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_\nu)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}}. \quad (117)$$

$$T_D^4 = \frac{\rho_0}{\sigma}|\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t_D)}|^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_D)}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}}. \quad (118)$$

$$T_{ph}^4 = \frac{\rho_0}{\sigma}|\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t_{ph})}|^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_{ph})}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{11\lambda}}. \quad (119)$$

$$T_{ph}^4 = T_{td}^4 \frac{\sin^{12}(\omega t_{td})}{\sin^{12}(\omega t_{ph})}. \quad (120)$$

将当今宇宙惯性质量密度 ρ_{td} 作为已知量，有如下方程

$$\rho_{td} = \rho_0|\frac{\sin(\omega t_0)}{\sin(\omega t_{td})}|^{9+\frac{4}{\lambda}}|\frac{\cos(\omega t_{td})}{\cos(\omega t_0)}|^{\frac{2}{5\lambda}}. \quad (121)$$

中微子退耦以后成为背景中微子。中微子振荡表明中微子有静止惯性质量，但很小。中微子以接近光速的速率运动，可视为辐射粒子。惯性质量密度 $\rho_\nu = \sigma_\nu T^4$， $\sigma_\nu \equiv \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}g_\nu$， g_ν 为中微子自旋自由度数。由于中微子有质量， g_ν 应该为 2 。宇宙流体的任一随动体元的中微子数目不变， $\frac{a^3(t_\nu)\sigma_\nu T_\nu^4}{k_B T_\nu} = \frac{a^3(t_{td})\sigma_\nu T_{\nu td}^4}{k_B T_{\nu td}}$ ，即

$$T_\nu^3 = T_{td}^3(\frac{\sin(\omega t_{td})}{\sin(\omega t_\nu)})^9. \quad (122)$$

T_{td} 为背景中微子的当今温度，由观测给出。 8 个待定量 T_ν 、 T_D 、 T_{ph} 、 t_ν 、 t_D 、 t_{ph} 、 ρ_0 和 λ 原则上可由 8 个方程 (114) 、 (116)~(122) 解出。

§5.2.4 宇宙结构的形成

对宇宙结构的形成不做过多的讨论，只给出一些半定量的说明。以下情况值得注意：（ 1 ）宇宙没有视界，不需要引入 Harrison=Zeldovich 谱作初始条件；（ 2 ）宇宙度规中的 k 值与物质密度 $\rho(t)$ 无关，这里不存在宇宙临界质量密度；（ 3 ）宇宙没有暴涨：（ 4 ）宇

宙自本周期膨胀以来已有 400 多亿年的历史，由式 (94) 可知 a 的增长非常缓慢，尤其宇宙从 $\dot{a}(0)=0$ 开始膨胀，宇宙早期演化比大爆炸模型要漫长得多；（ 5 ）从式 (108) 和 (110) 可知辐射为主与物质为主时期物质密度 $\rho(t)$ 的演化没有太大的区别；（ 6 ）由式 (94) 、(108) 和 (110) 可知在宇宙早期由于自引力结团的 Jeans 尺度 $\lambda_J=\frac{1}{a(t)}(\frac{\pi v^2}{G\rho(t)})^{\frac{1}{2}}\sim(\sin(\omega t))^{\frac{3}{2}+\frac{4}{2\lambda}}$ ， v 是宇宙流体介质中的声速，在宇宙早期 v 接近光速 c 。 λ_J 在宇宙早期很小，且其随时间的相对增长 $\frac{\dot{\lambda}_J(t)}{\lambda_J(t)}=\frac{1}{2}H(t)$ 比 $a(t)$ 的相对增长 $H(t)$ 要慢，原本小于 λ_J 的正密度扰动区域随着宇宙膨胀逐渐大于 λ_J 而必然形成物质结团； (7) 宇宙质量相对密度 $\Delta\equiv\frac{\tilde{\rho}(t)-\rho(t)}{\rho(t)}$ 的 K 幅度 $\delta_K(t)$ 满足

$$\ddot{\delta}_K(t)+2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\delta}_K(t)+(\frac{K^2v^2}{a^2(t)}-4\pi G\rho(t))\delta_K(t)=0. \tag{123}$$

其中 K 为 Δ 的傅里叶积分展开的波矢， $\rho(t)$ 为宇宙背景抹匀的质量密度， $\tilde{\rho}(t)$ 为有自引力结团的宇宙质量密度。这里只讨论自引力为主，可忽略式 (123) 中的 $\frac{K^2v^2}{a^2(t)}$ 。由式 (98) 可知今天 $\tan(\omega t)\sim 4.28\times10^{-2}$ 。将式 (94) 和 (108) 或 (110) 代入式 (123) 中可知从物质不均匀范围开始超过 Jeans 尺度的某个时刻至今大致以 $\delta_K(t)\sim C_1exp(\frac{C_0}{(\omega t)^{3.5+\frac{2}{\lambda}}})$ 演化， $C_0=\frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{(3.5+\frac{2}{\lambda})\omega}\frac{(\sin(\omega t_0))^{4.5+\frac{2}{\lambda}}}{|\cos(\omega t_0)|^{\frac{1}{11\lambda}}}$ 。今天 $exp(\frac{C_0}{(\omega t)^{3.5+\frac{2}{\lambda}}})$ 比 $exp(2.3\times10^{-2})$ 更接近于 1， $\delta_K(t_{td})\sim C_1exp(2.3\times10^{-2})\approx C_1$ 。即常数 C_1 近似为今天的 $\delta_K(t_{td})$ 。在宇宙早期，宇宙质量密度极大，只要质量密度的起伏范围超过 Jeans 尺度即可能由强大的自引力形成非常大的 $\delta_K(t)$ ，然后随时间减小最后基本稳定在 C_1 ；（ 8 ）在光子退耦时宇宙结团程度还很高，在刚退耦的光子背景上会留下这种结团特征，但结团造成的光子背景的温度差至今已被朗道阻尼基本抹匀，如今观测到的微波背景辐射的温度起伏应该很小了。综合考虑以上因素，宇宙的结团也许可以在各种尺度上分别产生，似乎并不需要暗物质。

§5.3 宇宙演化的一种定性讨论

§5.2 中是在 $\eta(t)$ 视为常量的近似条件下关于 $k=0$ 宇宙演化的讨论，若要严格求解相关方程则很困难。下面以 $k=1,\alpha=-\frac{1}{5}$ 为例，不定量计算只做半定量分析。

由宇宙学原理可知假定 $\Lambda=\Lambda(t)$ 是合理的， $\Lambda(t)$ 称为宇宙学参数。恢复为 SI 制后，式 (90) 成为

$$(1+2\alpha)\frac{3\ddot{a}}{a}+\frac{6\alpha\dot{a}^2}{a^2}+\frac{6\alpha c^2k}{a^2}+c^2\Lambda(t)=-G\tilde{\kappa}\rho. \tag{124}$$

由式 (18) 有

$$\tilde{\kappa}=\kappa/f^2(P)=\frac{\kappa}{\eta(t)4\pi K\rho a^2 I}. \tag{125}$$

当 a 很小时，由式 (20) 有

$$\tilde{\kappa}=\kappa/f^2(P)=\frac{\kappa}{\hat{K}2\pi^2\rho a^3(t)}. \tag{126}$$

从下面的讨论可知可以考虑 $\Lambda=0$ 。当 a 很大且 $\dot{a}(t)=0$ 时，将式 (125) 代入 (124) 可得

$$-\frac{3\ddot{a}}{a}\approx\frac{5G\delta^2}{6\eta(t)Ka_1}\sim\frac{G\delta^2}{K}\sim 10^{-38}(s^{-2}). \tag{127}$$

此时 $\ddot{a}<0$ ，对应于宇宙膨胀停止转向收缩。

当 a 很小且 $\dot{a}(t)=0$ 时，将式 (126) 代入 (124) 可得

$$\frac{9\ddot{a}}{5a}-\frac{6c^2}{5a^2}+\frac{G}{\hat{K}\pi a^3}=0. \tag{128}$$

若要求 $\ddot{a}>0$ ，即宇宙停止收缩转向膨胀，那么就必有

$$a>\frac{5Gr_0}{6\pi c^2K}\sim 10^4 m. \tag{129}$$

当满足条件 (129) 时宇宙停止收缩且转向膨胀。由式 (124) 、 (125) 和 (126) 可知 $a(t)$ 的演化只通过 $\eta(t)$ 很微弱地依赖于物质， $a(t)$ 的演化也许为宇宙的固有属性，宇宙会膨胀和收缩往复进行。条件 (129) 说明宇宙空间存在最小尺度，即宇宙没有奇点。在经典理论的框架下有可能避免宇宙演化奇点和宇宙大撕裂。

如果标量场 $\Lambda(t)$ 是宇宙的固有属性而与宇宙内容物无关，则 $\Lambda(t)$ 总能保证 $k=0$ 和 $k=1$ 的宇宙无奇点没有撕裂的周期性演化。事实上，我们总可以假定 $a(t)=a_q+a_c(t)$ ，其中 $a_c(t)$ 是非负的周期函数， a_q 是正的常数，即 $a(t)$ 的最小值。将 $a(t)=a_q+a_c(t)$ 代入式 (124) 总可以求得周期性变化的 $\Lambda(t)$ 。将式 (91) 和 (125) 代入 (124) 中估算可知 $k=0$ 和 $k=1$ 的当今宇宙 $\Lambda(t)$ 值非常小。也许这样的讨论没有意义，但如果反映宇宙拓扑结构的 k

值和宇宙的整体演化与宇宙内容物无关，那么是否可以认为宇宙时空性质在多大程度上是宇宙自身的属性和在多大程度上与宇宙内容物有关也许并不清楚。

§6 引力波源是否可多信道探测

§6.1 宇宙时空的能量

引力使得物质之间有能量交换，似乎就应该有某种局域性，但引力能量不可定域性却使得这种局域性不可描述，从引力作用中能量的交换让人费解。为此，人们颇费一番周折，给出了引力能量的一些整体描述。如 Komar 给出了具有类时 Killing 矢量场 ξ^a 的渐近平直稳态时空的总质量 (总能量)[17]； Arnowitt 等用坐标语言给出了渐近平直时空的 ADM 能量和 3 动量 [18]， Ashtekar 和 Hansen[19] 进一步用几何语言在时空的空间无穷远点 i^0 处定义了任一时刻 t 全空间 Σ_t 的 ADM 总 4 动量 P^a ，由其可以给出 ADM 能量和 ADM 3 动量；Bondi 等人研究了渐进类光超曲面 N 的 Bondi 能量 [20]~[22] 。 Komar 质量、 ADM 能量和 Bondi 能量均为包括引力能在内的时空总能量。

Komar 质量、 ADM 能量和 Bondi 能量的定义均对渐近平直时空而。宇宙时空不是渐进平直时空，以上定义都不适用。我们不妨认为宇宙时空的总能量 E 由引力能 E_G 和宇宙物质能量 E_M 组成，即 $E=E_G+E_M$ 。由式 (36) 定义各向同性观者测得的质点能量，并由此可进一步定义 E_M 。我们相信 E 对宇宙时是守恒的，并由此来定义 E_G 的改变。对宇宙时空，设 Σ_1 和 Σ_2 是任意两个宇宙时的同时面， E_G 和 E_M 的改变分别用 ΔE_G 和 ΔE_M 来表示。则 ΔE_G 由下式定义

$$\Delta E=\Delta E_M+\Delta E_G=0. \tag{130}$$

由此定义可知引力能量只有其变化才有意义且引力能量的改变是整体的。

§6.2 引力和惯性相互作用可能沿类空方向传播

由引力能的非定域性也许可以得到如下几点启发。（ 1 ）引力能的非定域性也许意味着引力能量没有传播性，引力作用过程中的能量交换只是物质与弯曲时空之间能量的就地交换；（ 2 ）若引力作用不传播能量只传播作用信息，那么引力有可能沿类空方向传播；

（3）引力能是时空弯曲的表现，引力能量的非定域性也许意味着时空弯曲的改变是整体而非定域的；（4）引力能量和时空弯曲的改变的非定域性意味着引力作用是一种非定域作用从而不是规范作用；（5）若惯性作用与引力是同一种作用的两个方面，则二者同样具有非定域性，是否可以认为惯性与引力作用是这种意义上的一种时空的整体作用。

至于引力和惯性作用沿什么样的类空方向传播，可能难于给出一般性的结论。单就宇宙时空而言，最自然的假设就是各向同性源的引力和惯性作用沿宇宙同时面传播，即宇宙同时面是作用的等相面。则宇宙时空中惯性作用的标量场 $f(P)$ 可由下式给出

$$f(P) = \int_{\Sigma} \hat{K}(\frac{r_0}{D})^{n(D)} exp(-\delta D)\rho_G(P')\hat{\varepsilon} \tag{131}$$

其中，Σ 为过点 P 的宇宙同时面，点 P' 在 Σ 上，$\rho_G(P')$ 为点 P' 的引力质量密度，$\hat{\varepsilon}$ 为 P' 点与 Σ 上诱导度规适配的体元，D 为 Σ 上点 P 与 P' 之间的距离。则式 (17) 和 (18) 中 $\eta(t) = 1$，从而 §5.2.1 ~ 5.2.3 中的讨论是精确的。

若引力沿宇宙同时面传播，则相对于均匀各向同性观者静止的引力波源（例如两个并和天体的质心）发出的引力波应该同时到达地球上各探测器。电磁信号沿类光方向传播，电磁信号会晚于引力信号到达探测器，我们不可能同时多信道探测到引力波事件的发生。若引力波源相对于各向同性观者运动，则自然可假设引力波沿引力波源的同时面传播（作为估算，将引力波传播的时空区域近似看作闵氏时空），地球上两台探测器探测到的引力波事件将有时间差，且该时间差取决于引力波源的运动。以引力波源与地球上两台探测器在一条直线上的情况为例，地球上相距 l 的两台探测器探测到引力波的时间差为 $dt = \frac{u}{c}\frac{l}{c}$，$u$ 为引力波源相对于各向同性观者运动的速率。引力波到达探测器所用时间为 $t = \frac{u}{c}\frac{L}{c}$，其中 L 为引力波源与探测器之间的距离，则电磁波与引力波到达探测器的时间差为 $\Delta t = (1 - \frac{u}{c})\frac{L}{c}$。如果引力波源与地球上两台探测器不一定在一条直线上，则 $dt \le \frac{u}{c}\frac{l}{c}$，即 $u \ge \frac{cdt}{l}c$。对于 LIGO 探测器，$l = 3 \times 10^6 m$。GW150914 的 $dt = 7 \times 10^{-3} s$，则 $u \ge 0.7c$。GW151226 的 $dt = 1.1 \times 10^{-3} s$，则 $u \ge 0.11c$。GW170817 是两个中子星并和的结果，同时观测到了引力波与电磁信号。如果引力波沿类空方向传播，则引力波源的定位是非常困难的。不能定位就很难判断我们所观测到的引力波与电磁信号是否同源。GW170817 的多信道观测结果是否

为巧合，有待进一步的观测证实。当然，引力波沿类空方向传播只是一种可能，并不排除引力波沿类光方向传播的可能。

若引力作用沿类空方向传播，则描述引力的方程可能是如下两种情况。第一种情况，描写引力的方程是式 (47) 存在的非行波解 $g_{\mu\nu}(t,x,y,z)=g_{\mu\nu}(t-k_x x-k_y y-k_z z,x,y,z)(k_x=k_y=k_z=0)$， x,y,z 为某种物理的 3+1 分解的空间面上的坐标。如史瓦西真空度规 (63)，静态球对称星体内部的运动方程 (73)~(75)，宇宙演化方程 (88)~(89) 等等都是非行波解。稳态情况是 $g_{\mu\nu}(t,x,y,z)$ 不含 t 的特例，宇宙演化方程是 $g_{\mu\nu}(t,x,y,z)$ 只含 t 的特例。式 (47) 的行波解不描述实际的引力。第二种情况，描写引力的方程由式 (47) 的稳态解生成，即假定稳态解中的源变化而得到的动态情况。例如将式 (63) 中的 M_G 看成随 t 变化而得到的动态情况，将方程 (73)~(75) 中的 p 和 ρ 看成随 t 变化而得到的动态情况，这种情况的方程不一定满足式 (47)。

至于引力作用可能不是规范作用还可以从另一个角度理解。虽然还没有一种成功的量子引力理论，但通常认为其应该是一种规范场理论。现代规范场论的观点认为引力作用和引力能量是通过称为引力子的规范粒子来传递的。黑洞事件视界内的真空光锥朝里是单向膜区，包括光子和引力子的所有物质都不可能逃出黑洞，规范粒子是如何逃出黑洞传递出引力作用从而影响事件视界外的时空度规的？

§7 小结

本文针对马赫原理存在的问题以及压强如何影响时空弯曲给出了作者自己的观点和解决方案，在一定程度上能够缓解一些存疑问题，如暗物质、暗能量、黑洞奇点等。基于引力能量的不可定域性，提出引力波沿类空方向传播的可能性并对引力波源的多信道探测提出了疑问。本文表述的观点和所给数据未必准确，例如由类星体红移给出的宇宙背景 $f(P)=0.0353$ 是否过小，所给出的解决方案也可能过于简化而有待进一步研究，但本文探讨的问题和解决思路对相关问题的研究也许会有所启发。

参考文献

[1] Thirring H. The effect of rotating distant masses in the Einstein gravitational theory[J]. Physikalische Zeitschrift, 1921, 22: 29

[2] Hawking S W, Ellis G F R. The Large Scale Structure of Space-Time[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1973: 369-372, 261-275.

[3] Brans C H, Dicke R H. Machs Principle and A Relativistic Theory of Gravitation[J]. Physical Review, 1961, 124: 925-935.

[4] Reasenberg R D, Shapiro I I, MacNeil P E et al. Viking Relativity Experiment-Verification of Signal Retardation by Solar Gravity[J]. Astrophysical Journal, 1979, 234: L219-L221.

[5] Carroll S, Press W, Turner E. The Cosmological Constant[J]. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992, 30: 499-542. Sahni V, Starobinsky A. The Case for a Positive Cosmological Λ-term, arXiv, 1999: Astro-ph/9904398. Turner M S. Dark Matter, Dark energy and Fundamental Physics. arXiv, 1999: Astro-ph/9912211.

[6] Appelquist T, Chodos A, Freund P G O(ed.). Modern Kaluza-Klein Theories[M]. Frontiers in Physics Series(Vol. 65), Reading, USA: Addison-Wesley, 1987: 619 P.

[7] Harko T et al.. f(R,T) gravity[J]. Physical Review D, 2011, 84(2): 024020-1-024020-11.

[8] Yang X, Ma Y, Shao J, Zhou W. Killing Reduction of 5-Dimensional Spacetimes[J], Physical Review D, 2003, 68（2）： 024006-024010.

[9] Wald R M. General Relativity[M]. Chicago:The University of Chicago Press, 1984: 95-97, 47.

[10] Will C M. Theory and Experiment in Gravitational Physics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Will C M. Stable Clocks and General Relativity. 1995: arXiv: gr-qc/9504017 vl.

[11] Williams J G, Dicke R H, et al, New Test of Equivalence Principle from Lunar Laser Ranging[J]. Physical Review Letters, 1976, 36: 551-554.

[12] Will C M. The Confrontation between General Relativity and Experiment[J]. Living Reviews in Relativity, 2001, 4: 1-113

[13] Shapiro I I. Fourth Test of General Relativity[J]. Physical Review Letters, 1964, 13: 631-651.

[14] Wu X-F, et al. Testing Einstein's Weak Equivalence Principle With Gravitational Waves[J]. Physical

Review D, 2016, 94: 024061-5.

[15] Higgs P W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons[J]. Physical Review Letters, 1964 13(16): 508-509.

[16] Arun K, Gudennavar S B, Sivaram C. Dark Matter, Dark Energy, and Alternate Models: a Review[J]. Advances in Space Research, 2017, 60: 166-186.

[17] Komar A. Covariant Conservation Laws in General Relativity[J]. Physical Review, 1959, 113: 934-936.

[18] Arnowitt R, Deser S, Misner C W. Republication of: The Dynamics of General Relativity[J]. General Relativity and Gravitation, 2008, 40: 1997-2027.

[19] Ashtekar A, Hansen R O. A Unified Treatment of Null and Spatial Infinity in General Relativity. I. Universal Structure, Asymptotic Symmetries, and Conserved Quantities at Spatial Infinity[J]. Journal of Mathematical Physics, 1978, 19: 1542-1566.

[20] Bondi H, van der Burg M G J, Metzner A W K. Gravitational Waves in General Relativity. VII Waves from Axi-symmetric Isolated systems[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1962, A269: 21-52. Penrose R, Zero Rest-Mass Fislds Including Gravitation: Asymptotic Behvior[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1965, A284: 159-203.

[21] Geroch R P, Winicour J. Linkages in General Relativity[J]. Journal of Mathematical Physics, 1981, 22: 803-812.

[22] Ashtekar A, Magnon-Ashtekar A. Energy-Momentum in General Relativity[J]. Physical Review Letters, 1979, 43: 181-184.